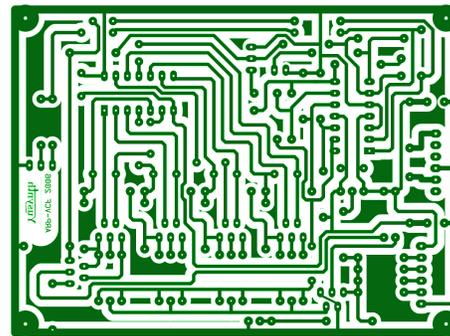


# Electronique

## Plan

1. RAPPELS D'ÉLECTRICITÉ
2. GÉNÉRALITÉS SUR LES FILTRES
3. FILTRES DU PREMIER ORDRE
4. FILTRES DU SECOND ORDRE
5. RÉCAPITULATIF ET GÉNÉRALISATION
6. COMPLÉMENTS



## 1 Rappels d'électricité

### 1.1 Les différents types de régimes

a) Régime continu : les grandeurs électriques  $i$  et  $u$  sont constantes.

b) Régimes variables dans l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires) : les grandeurs électriques  $i(t)$  et  $u(t)$  dépendent du temps mais l'intensité  $i(t)$  prend la même valeur en tout point d'une branche d'un circuit à un même instant  $t$ . On peut distinguer dans cette approximation :

- Les régimes transitoires : régime d'un circuit dont l'état dépend des conditions initiales de celui-ci. Un régime transitoire a une durée finie, égale à environ  $5\tau$  si  $\tau$  est le temps caractéristique de l'équation différentielle associée.
- Le régime permanent : c'est le régime d'un circuit lorsque l'état de celui-ci ne dépend pas des conditions initiales. Il se répète donc à l'identique indéfiniment. C'est le cas des régimes périodiques, dont le plus important est le régime sinusoïdal forcé.
- Régime sinusoïdal forcé : les grandeurs électriques  $i(t)$  et  $u(t)$  sont des fonctions sinusoïdales du temps. Pour simplifier les calculs, on utilise la représentation complexe des variables sinusoïdales :

$$\underline{u} = u_m \exp[j(\omega t + \phi_u)] = \underline{u}_m \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{i} = i_m \exp[j(\omega t + \phi_i)] = \underline{i}_m \exp(j\omega t)$$

Les amplitudes complexes  $\underline{u}_m$  et  $\underline{i}_m$  contiennent toute l'information sur le signal (amplitude et phase). En représentation complexe, dériver revient à multiplier par  $j\omega$  et intégrer revient à diviser par  $j\omega$ .

Pour tout dipôle linéaire, on définit l'impédance complexe  $\underline{Z}$  et l'admittance complexe  $\underline{Y}$  par (en convention récepteur) :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \quad \text{et} \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

c) Régime ondulatoire : l'intensité  $i(t)$  ne prend pas la même valeur en tout point d'une branche d'un circuit à un même instant  $t$  (exemple : ligne à haute tension). Elle se propage à une vitesse proche de celle de la lumière  $c$ . Le phénomène doit être pris en compte si la longueur caractéristique du circuit  $L$  est de l'ordre de  $L \approx cT$  où  $T$  est la période des signaux utilisés (par exemple  $L = 300$  km à 1 kHz,  $L = 50$  cm à 600 MHz).

### 1.2 Dipôles usuels

- Résistor                      caractéristique :  $u = Ri$     (récepteur)                      impédance :  $\underline{Z}_R = R$
- Condensateur                caractéristique :  $i = C \frac{du}{dt}$     (récepteur)                      impédance :  $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$
- Bobine                        caractéristique :  $u = L \frac{di}{dt}$     (récepteur)                      impédance :  $\underline{Z}_L = jL\omega$
- Générateurs

Il existe deux représentations possibles pour les générateurs : Thévenin (en source de tension) ou Norton (en source de courant). Le passage de l'une à l'autre permet souvent de simplifier les circuits étudiés.

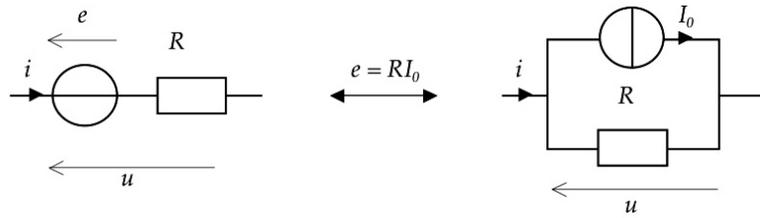


Figure 1: Représentation de Thévenin ↔ Représentation de Norton

### 1.3 Théorèmes généraux

- Loi d'Ohm : en convention récepteur aux bornes d'un dipôle :  $u = Ri$  ou  $\underline{u} = \underline{Z}i$
- Diviseur de tension (résistances  $R_k$  ou impédances  $\underline{Z}_k$  en série) :

$$u_k = \frac{R_k}{\sum R_k} u_0 \quad \text{ou} \quad \underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\sum \underline{Z}_k} u_0$$

- Diviseur de courant (conductances  $G_k$  ou admittances  $\underline{Y}_k$  en dérivation) :

$$i_k = \frac{G_k}{\sum G_k} u_0 \quad \text{ou} \quad \underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\sum \underline{Y}_k} u_0$$

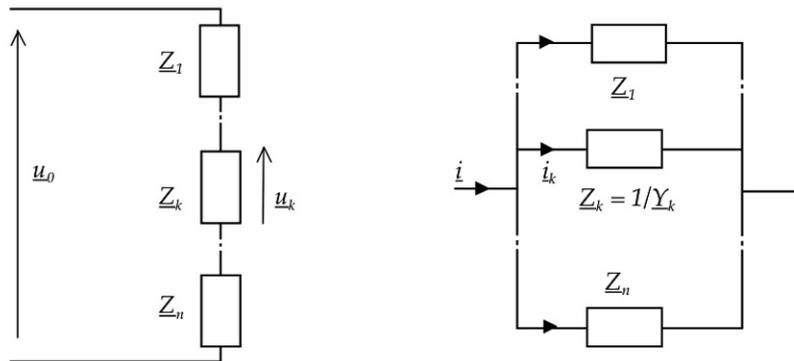


Figure 2: diviseur de tension (à gauche) ; diviseur de courant (à droite)

- Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds :  $\sum_k \epsilon_k i_k = 0$  où  $\epsilon_k = +1$  si le courant  $i_k$  arrive au nœud considéré

Loi des mailles :  $\sum_k \epsilon_k u_k = 0$  où  $\epsilon_k = +1$  si la tension  $u_k$  est dans le sens positif pour la maille considérée

- Théorème de Millman

Potentiel du nœud k :  $V_k = \frac{\sum \underline{Y}_k e_k}{\sum \underline{Y}_k}$       En présence de sources de courant :  $V_k = \frac{\sum \underline{Y}_k e_k + \sum i_{0k}}{\sum \underline{Y}_k}$

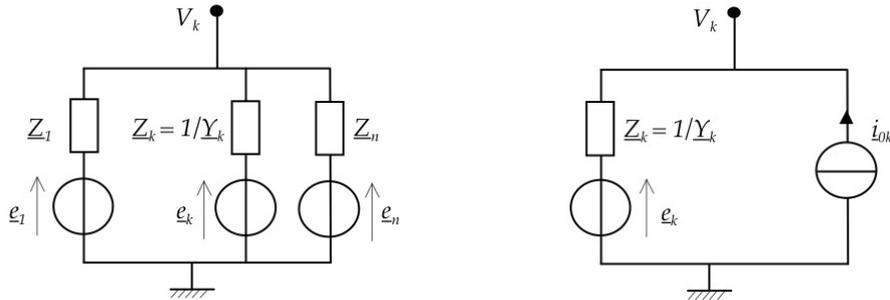


Figure 3: Théorème de Millman (à droite : en présence de sources de courant)

### 1.4 Puissance

- Puissance instantanée reçue (algébriquement) par un dipôle :  $p(t) = u(t)i(t)$
- En régime périodique quelconque (de période  $T$ ), la puissance instantanée varie en général trop rapidement. La puissance moyenne  $P$  reçue par un dipôle est un concept plus pertinent. Par définition :

$$P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

- Puissance moyenne reçue par un dipôle d'impédance  $\underline{Z}$  en régime sinusoïdal forcé :

$$P = UI \cos \phi = \text{Re}(\underline{Z}) I^2 = \text{Re}(\underline{Y}) U^2$$

où  $U = u_{eff}$  et  $I = i_{eff}$ .

Puissance complexe en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{P} = \frac{1}{2} \underline{u} \cdot \underline{i}^* = \frac{1}{2} \underline{u}_m \cdot \underline{i}_m^*$$

On a alors  $P = \text{Re}(\underline{P})$  (puissance active = puissance moyenne) et  $Q = \text{Im}(\underline{Q})$  (puissance réactive).

Pour un résistor en régime sinusoïdal forcé :  $P = RI^2$ , pour un condensateur ou une bobine :  $P = 0$ .

## 2 Généralités sur les Filtres

### 2.1 Fonction de transfert

- On appelle quadripôle tout circuit électrique possédant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. Un quadripôle est linéaire lorsque tous les dipôles qui le constituent sont linéaires. Il est actif s'il comporte au moins un dipôle actif, passif sinon.
- On note  $e(t)$  le signal d'entrée du quadripôle et  $s(t)$  le signal de sortie (ou réponse). Ces grandeurs peuvent être une tension ou une intensité d'entrée ( $u_e(t)$ ,  $i_e(t)$ ), ou de sortie ( $u_s(t)$ ,  $i_s(t)$ ).

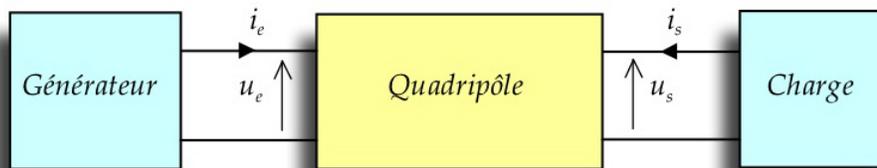


Figure 4: Signaux d'entrée et de sortie d'un quadripôle

- Le signal d'entrée  $e(t)$  et la réponse  $s(t)$  sont reliés par une équation différentielle linéaire du type:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (1)$$

- Si on se place en régime sinusoïdal forcé, on peut utiliser la représentation complexe:

$$\begin{cases} \underline{e} = e_m e^{j(\omega t + \phi_e)} = \underline{e}_m e^{j\omega t} \\ \underline{s} = s_m e^{j(\omega t + \phi_s)} = \underline{s}_m e^{j\omega t} \end{cases}$$

La fonction de transfert du circuit est le nombre complexe  $\underline{H}(j\omega)$  tel que:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}_m}{\underline{e}_m}$$

- Module:  $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = s_m/e_m$ : rapport des amplitudes;
- Argument:  $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$ : déphasage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ .

L'équation (1) s'écrit:

$$a_n (j\omega)^n \underline{s} + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} \underline{s} + \dots + a_1 j\omega \underline{s} + a_0 \underline{s} = b_m (j\omega)^m \underline{e} + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} \underline{e} + \dots + b_1 j\omega \underline{e} + b_0 \underline{e}$$

On en déduit la fonction de transfert:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

On peut aussi utiliser la variable de Laplace  $p = j\omega$ . La fonction de transfert s'écrit alors:

$$\underline{H}(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

- Principe de superposition: si  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  sont les réponses du quadripôle aux entrées  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$ , alors pour tous coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ , la réponse à la combinaison linéaire  $\lambda e_1(t) + \mu e_2(t)$  est  $\lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ .

## 2.2 Filtres

- De manière générale, un filtre est un système (électrique ou mécanique) dont le signal de sortie dépend de la fréquence du signal d'entrée.
- L'ordre du filtre est l'ordre de l'équation différentielle reliant le signal d'entrée  $e(t)$  et le signal de sortie  $s(t)$ .
- Il existe quatre principaux types de filtres agissant sur le module de la fonction de transfert (gain):
  - passe-bas: la bande passante est du type  $[0, f]$
  - passe-haut: la bande passante est du type  $[f, +\infty[$
  - passe-bande: la bande passante est du type  $[f_1, f_2]$
  - coupe-bande: la bande passante est du type  $[0, f_1] \cup [f_2, +\infty[$

Les filtres qui n'agissent pas sur le gain mais induisent une rotation de phase sont appelés "déphaseurs".

## 2.3 Diagramme de Bode

Pour visualiser les propriétés d'un filtre, on trace les variations de la fonction de transfert (gain et phase) en fonction de la pulsation (ou de la fréquence). Les variations pouvant être importantes, on utilise de préférence des échelles logarithmiques qui autorisent une meilleure représentation des informations.

• Unités de gain: si  $P_e$  est la puissance reçue en entrée d'un filtre et  $P_s$  la puissance cédée en sortie, on définit l'amplification en puissance par le rapport  $A_p$ :

$$A_p = \frac{P_s}{P_e}$$

On définit le gain  $G_p$  par le logarithme décimal de  $A_p$ . Il peut être exprimé en Bels ou en décibels dB (10 dB = 1 Bel):

$$G_p = \log A_p \text{ (en Bels)} \quad \text{ou} \quad G_p = 10 \log A_p \text{ (en décibels dB)}$$

Pour le gain en tension  $A_u = H(\omega)$ , le gain en décibels  $G_{dB}$  vaut:

$$G_{dB} = 20 \log A_u = 20 \log H(\omega)$$

Le facteur 20 est choisi pour assurer l'identité entre les gains (en dB) de la puissance et de la tension (les puissances sont en effet proportionnelles aux carrés des tensions).

• Echelle logarithmique des pulsations (ou des fréquences): on choisit en abscisse la variable  $\log \omega$  ou la variable réduite  $\log x$  où  $x = \omega/\omega_0$ ,  $\omega_0$  étant une pulsation caractéristique du filtre.

- décade: intervalle de pulsations  $[\omega_1, \omega_2]$  telles que  $\omega_2 = 10 \omega_1$  (écart de 1 en unités logarithmiques).
- octave: intervalle de pulsations  $[\omega_1, \omega_2]$  telles que  $\omega_2 = 2 \omega_1$  (écart de 0,3 en unités logarithmiques).

• Diagramme de Bode du gain: c'est le tracé de  $G_{dB} = 20 \log H(\omega)$  en fonction de  $\log \omega$  ou de  $\log x$  (diagramme log-log).

• Diagramme de Bode de la phase: c'est le tracé de  $\phi(\omega)$  en fonction de  $\log \omega$  ou de  $\log x$  (diagramme semi-log).

• Diagramme asymptotique: c'est le diagramme de Bode réduit à ses asymptotes basses fréquences (BF) et hautes fréquences (HF). Celui-ci suffit en général à caractériser les principales propriétés du filtre.

## 2.4 Pulsation de coupure

La pulsation de coupure  $\omega_c$  est telle que

$$H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou encore} \quad G_{dB} = G_{dBmax} - 3 \text{ dB}$$

La première équation en  $\omega_c$  est en général plus facile à résoudre et doit être privilégiée dans les calculs.

# 3 Filtres du Premier Ordre

On travaille en sortie ouverte: le courant en sortie du filtre est nul. La fonction de transfert est établie en régime sinusoïdal forcé, on utilise donc la représentation complexe.

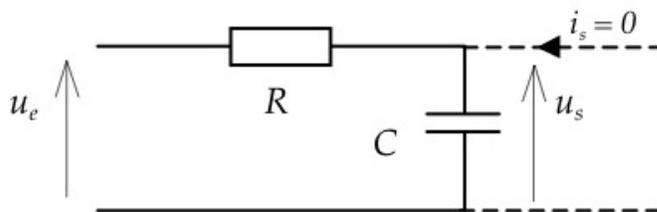


Figure 5: RC passe-bas d'ordre 1

### 3.1 Circuit RC passe-bas : sortie aux bornes de C

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes du condensateur supposé idéal.

#### a) Fonction de transfert

On a (formule du diviseur de tension):

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \quad \rightarrow \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

On peut donc écrire la forme réduite suivante:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  (pulsation propre du filtre) et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  (pulsation réduite, sans dimension).

#### b) Module et argument

- Module

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = -10 \log(1 + x^2)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = -\arctan(x) \text{ avec } \underline{H} = \frac{1}{1 + jx} = \frac{1 - jx}{1 + x^2} \text{ donc } \sin \phi < 0 \quad \rightarrow \quad \phi \in [-\pi, 0]$$

D'où

$$\phi = -\arctan(x) \text{ avec } \phi \in [-\pi, 0]$$

#### c) Comportements limites

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert  $\rightarrow u_s = u_e$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil  $\rightarrow u_s = 0$

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre passe-bas

#### d) Etude asymptotique

- Equations des asymptotes

★ BF si  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \rightarrow 0$

$\rightarrow$  asymptote horizontale

★ HF si  $x \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1/jx = -j/x$  donc  $G_{dB} = 20 \log(1/x) = -20 \log x$  et  $\phi \rightarrow -\pi/2$

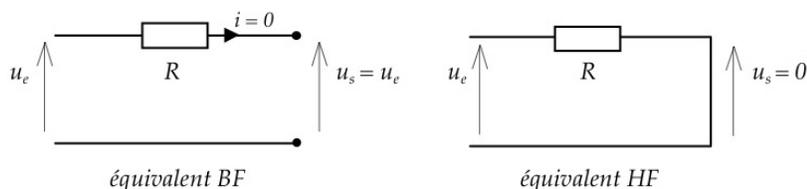


Figure 6: Circuits limites du filtre RC passe-bas

→ l'asymptote est une droite de pente -20 dB/décade

★ Intersection des asymptotes:  $\log x = 0 \rightarrow x = 1$  (soit  $\omega = \omega_0$ ).

- Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = 1/(1 + j)$  donc  $H = 1/\sqrt{2}$  et  $G_{dB} = 20 \log(1/\sqrt{2}) = -10 \log 2 = -3$  dB et  $\phi = \arg(1/(1 + j)) = \arg((1 - j)/2) = -\pi/4$

e) Diagramme de Bode

- Réponse en gain

On déduit de l'étude précédente le diagramme de Bode asymptotique du filtre: on trace les asymptotes BF et HF en fonction de  $\log x$ . Celles-ci se croisent pour  $x = 1$ . La courbe du gain réel est en-dessous des asymptotes ( $G_{dB} < 0$ ). L'écart maximal est obtenu pour  $x = 1$  et vaut -3 dB. Cet écart étant faible, on peut se contenter de la représentation asymptotique du gain.

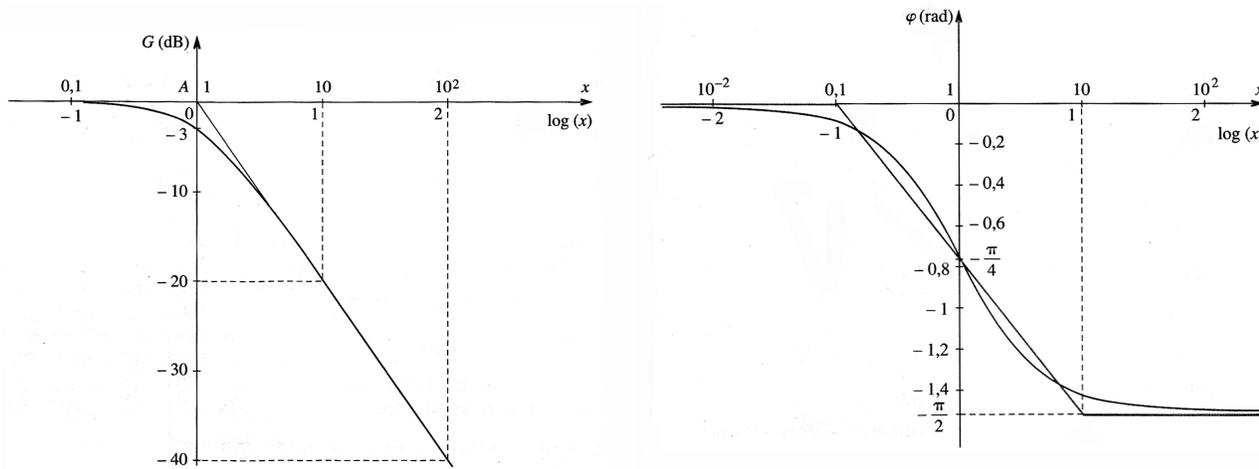


Figure 7: Diagrammes de Bode (gain et phase) du RC passe-bas

- Réponse en phase

pour  $\log x = -1$  ( $\omega = \omega_0/10$ ), on calcule  $\phi = -6^\circ$ .

pour  $\log x = +1$  ( $\omega = 10\omega_0$ ), on calcule  $\phi = -84^\circ$ .

→ la rotation de phase (de  $-\pi/2$ ) se fait essentiellement entre  $\log x = -1$  et  $\log x = +1$  donc sur deux décades.

De plus, le point  $(0, -\pi/4)$  est un point de symétrie de la courbe de phase.

f) Pulsation de coupure, bande passante à 3 dB

La pulsation de coupure  $\omega_c$  est telle que

$$G_{dB} = G_{dBmax} - 3 \text{ dB} \quad \text{ou encore} \quad H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

Or  $H_{max} = 1$  (obtenu pour  $\omega \rightarrow 0$ ). Il faut donc résoudre

$$\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow 1+x^2 = 2 \rightarrow x = 1 \text{ soit } \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

**g) Caractère intégrateur du RC passe-bas**

A haute fréquence, la fonction de transfert peut s'écrire:

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jx} \approx \frac{1}{j\omega/\omega_0} = \frac{\omega_0}{j\omega}$$

En revenant à l'équation différentielle entre  $u_e(t)$  et  $u_s(t)$ , on a alors:

$$\underline{u}_s = \underline{H} \underline{u}_e = \omega_0 \frac{u_e}{j\omega} = \omega_0 \int u_e dt \rightarrow u_s(t) = \omega_0 \int u_e(t) dt = \frac{1}{RC} \int u_e(t) dt$$

Le filtre réalise l'intégration de la tension d'entrée (au facteur  $1/RC$  près).

Conclusion: un filtre RC passe-bas est intégrateur à hautes fréquences.

Remarque: filtre intégrateur idéal. Il faut une fonction de transfert du type (pour toutes fréquences):

$$\underline{H} = \frac{H_0}{j\omega/\omega_0} \text{ avec } H_0 \text{ réel}$$

Le gain en décibels s'écrit alors:  $G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log \omega/\omega_0$ . C'est une droite de pente -20 dB/décade.

**3.2 Circuit RC passe-haut : sortie aux bornes de R**

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes du résistor. Le condensateur est supposé idéal.

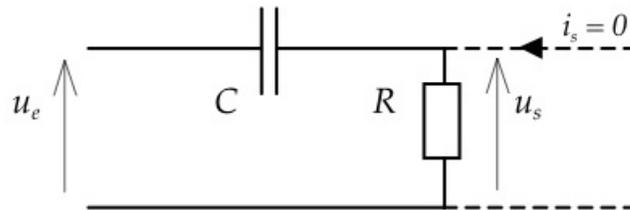


Figure 8: RC passe-haut d'ordre 1

**a) Fonction de transfert**

On a (diviseur de tension):

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + 1/(jC\omega)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On peut donc écrire la forme réduite suivante:

$$\underline{H} = \frac{jx}{1+jx} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \text{ et } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

**b) Module et argument**

- Module

$$H = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = 20 \log x - 10 \log(1 + x^2)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = \arg(jx) - \arg(1 + jx) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

$$\text{avec } \underline{H} = \frac{jx}{1 + jx} = \frac{x^2 + jx}{1 + x^2} \quad \text{donc } \sin \phi > 0 \quad \longrightarrow \quad \phi \in [0, \pi]$$

D'où

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \quad \text{avec } \phi \in [0, \pi]$$

Remarque: l'argument peut s'obtenir en translatant de  $+\pi/2$  celui du filtre  $RC$  passe-bas.

### c) Comportements limites

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert  $\longrightarrow u_s = 0$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil  $\longrightarrow u_s = u_e$

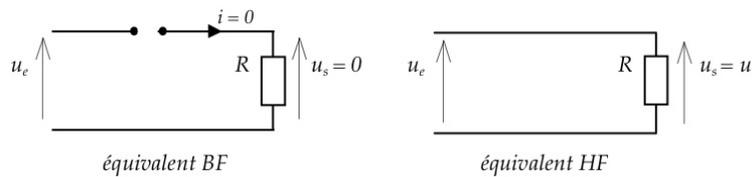


Figure 9: Circuits limites du filtre  $RC$  passe-haut

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre passe-haut

### d) Etude asymptotique

- Equations des asymptotes

★ BF si  $x \longrightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx jx$  donc  $G_{dB} = 20 \log(x)$  et  $\phi \longrightarrow +\pi/2$   
 $\longrightarrow$  l'asymptote est une droite de pente  $+20$  dB/décade

★ HF si  $x \longrightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \longrightarrow 0$   
 $\longrightarrow$  asymptote horizontale

★ Intersection des asymptotes:  $\log x = 0 \longrightarrow x = 1$  (soit  $\omega = \omega_0$ ).

- Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = j/(1 + j)$  donc  $H = 1/\sqrt{2}$  et  $G_{dB} = 20 \log(1/\sqrt{2}) = -10 \log 2 = -3$  dB  
 et  $\phi = \arg(j/(1 + j)) = \pi/2 - \arg(1 + j) = +\pi/4$

### e) Diagramme de Bode

- Réponse en gain

La courbe du gain réel est en-dessous des asymptotes ( $G_{dB} < 0$ ). L'écart maximal vaut  $-3$  dB (pour  $x = 1$ ). Les asymptotes donnent donc une bonne représentation du gain.

- Réponse en phase

Comme pour le passe-bas, la rotation de phase (de  $-\pi/2$ ) se fait essentiellement entre  $\log x = -1$  et  $\log x = +1$  donc sur deux décades.

Le point  $(0, +\pi/4)$  est un point de symétrie de la courbe de phase.

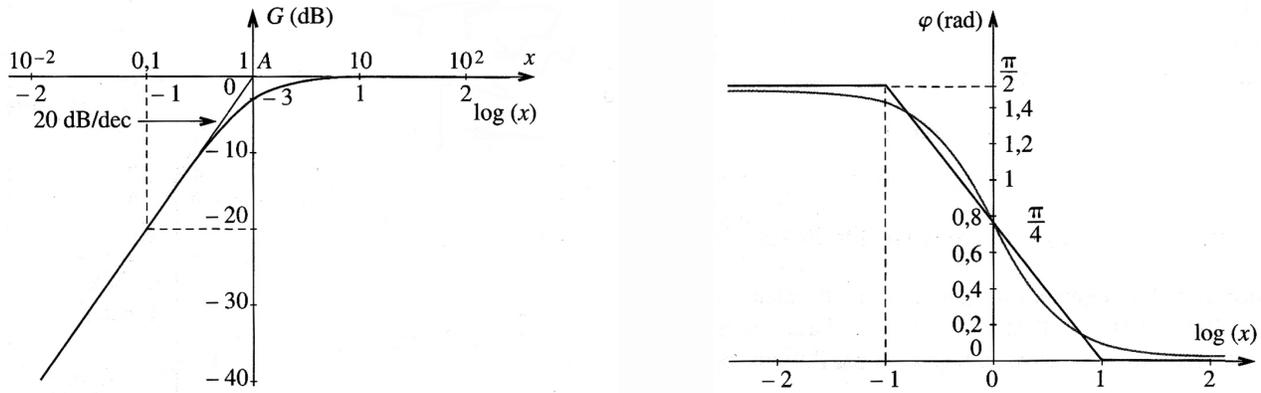


Figure 10: Diagrammes de Bode (gain et phase) du RC passe-haut

**f) Pulsation de coupure, bande passante**

La pulsation de coupure  $\omega_c$  est telle que

$$G_{dB} = G_{dBmax} - 3 \text{ dB} \quad \text{ou encore} \quad H(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

**g) Caractère dérivateur du RC passe-haut**

A basses fréquences, la fonction de transfert peut s'écrire:

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx} \approx jx = j \frac{\omega}{\omega_0}$$

D'où

$$\underline{u}_s = \underline{H} \underline{u}_e = j \frac{\omega}{\omega_0} \underline{u}_e = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e}{dt} \rightarrow u_s(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e(t)}{dt} = RC \frac{du_e(t)}{dt}$$

Le filtre réalise la dérivation de la tension d'entrée (au facteur  $RC$  près).

Conclusion: un filtre  $RC$  passe-haut est dérivateur à basses fréquences.

Remarque: filtre dérivateur idéal. Il faut une fonction de transfert du type (pour toutes fréquences):

$$\underline{H} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_0} \quad \text{avec } H_0 \text{ réel}$$

Le gain en décibels s'écrit alors:  $G_{dB} = 20 \log \omega / \omega_0 + 20 \log H_0$ . C'est une droite de pente +20 dB/décade.



## 4 Filtres du Second Ordre

On travaille en sortie ouverte: le courant en sortie du filtre est nul.

### 4.1 Circuit RLC passe-bas : sortie aux bornes de C

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes du condensateur supposé idéal. La bobine est également supposée idéale (sans résistance).

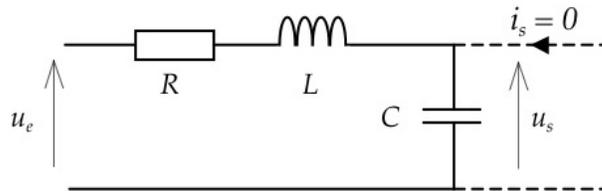


Figure 11: RLC passe-bas d'ordre 2

#### a) Fonction de transfert

- On a (diviseur de tension):

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1/(jC\omega)}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)}$$

Soit:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

- Forme canonique

- 1) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $(j\frac{\omega}{\omega_0})^2$ . Ceci permet de déterminer  $\omega_0$ .
- 2) on identifie le terme en  $\omega$  à  $\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}$ . Ceci permet de déterminer le facteur de qualité  $Q$ .

$$\text{Soit } -LC\omega^2 = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{et } jRC\omega = \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Finalement:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Forme réduite: en posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2}$$

#### b) Module et argument

- Module

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = -10 \log((1 - x^2)^2 + x^2/Q^2)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1 - x^2)}\right)$$

avec  $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2} = \frac{1 - x^2 - \frac{1}{Q}jx}{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}$  donc  $\sin \phi < 0 \rightarrow \phi \in [-\pi, 0]$

**c) Comportements limites**

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil (interrupteur fermé)  $\rightarrow \underline{u}_s = \underline{u}_e$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert  $\rightarrow \underline{u}_s = 0$

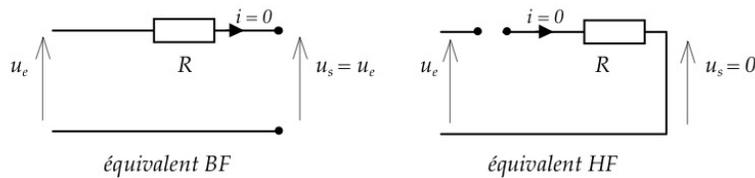


Figure 12: Circuits limites du filtre *RLC* passe-bas

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre passe-bas

**d) Etude asymptotique**

- Equations des asymptotes

★ BF si  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  asymptote horizontale

★ HF si  $x \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx -1/x^2$  donc  $G_{dB} = 20 \log(1/x^2) = -20 \log x^2 = -40 \log x$  et  $\phi \rightarrow -\pi$   
 $\rightarrow$  l'asymptote est une droite de pente -40 dB/décade.

★ Intersection des asymptotes:  $40 \log x = 0 \rightarrow x = 1$  (soit  $\omega = \omega_0$ ).

- Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = 1/(1 + j/Q - 1) = -jQ$  donc  $G_{dB} = 20 \log Q$  et  $\phi = \arg(1/(1 + j/Q - 1)) = \arg(-jQ) = -\pi/2$ .

- Courbe réelle

La quantité  $20 \log Q$  peut prendre des valeurs très différentes suivant les valeurs de  $Q$ . L'écart entre la courbe réelle et les asymptotes peut donc être très important en  $\omega = \omega_0$ .

Par exemple, pour  $x = 1$ :  
 $Q = 0,1 \rightarrow G_{dB} = -20$  dB;  
 $Q = 0,5 \rightarrow G_{dB} = -6$  dB;  
 $Q = 1 \rightarrow G_{dB} = 0$  dB;  
 $Q = 10 \rightarrow G_{dB} = +20$  dB.

$\rightarrow$  le diagramme asymptotique n'est pas suffisant pour décrire la réponse en gain au voisinage de  $\omega_0$ .

Etudions le maximum du gain:  $G_{dB}$  est maximum lorsque la fonction  $f(x) = (1 - x^2)^2 + x^2/Q^2$  passe par un minimum (car le numérateur de  $H(x)$  ne dépend pas de  $x$ ).

On calcule  $f'(x) = 2(1 - x^2)(-2x) + 2x/Q^2 = 2x[-2(1 - x^2) + 1/Q^2]$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ ou } x = x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$$

Conclusion:

$$\begin{cases} \text{si } Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} : \text{ le maximum de } G_{dB} \text{ est en } x = 0 \text{ (asymptote BF)} \\ \text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} : \text{ le maximum de } G_{dB} \text{ est en } x = x_1 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ (proche de } x=1) \end{cases}$$

**e) Diagrammes de Bode**

Les diagrammes de Bode en gain et phase sont donnés Figure 13.

Pour un circuit RLC série, la réponse en tension aux bornes du condensateur correspond donc à un filtre passe-bas. Celui-ci peut présenter une surtension importante au voisinage de  $\omega_0$  lorsque  $Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$  ( $= 0,707$ ).

Le diagramme de phase correspond à une rotation de phase totale de  $-\pi$ . Cette rotation est d'autant plus rapide que  $Q$  est élevé.

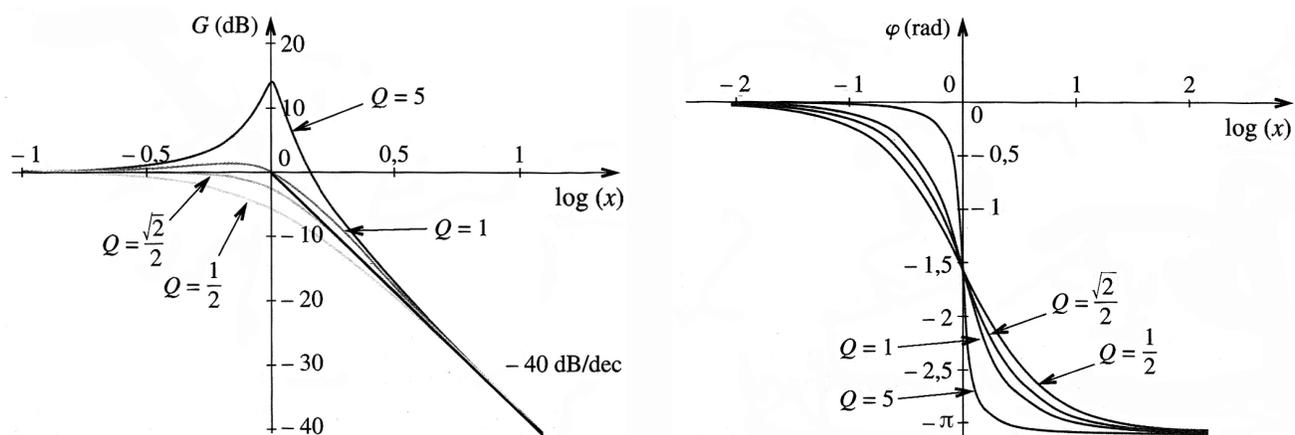


Figure 13: Diagrammes de Bode (gain et phase) du RLC passe-bas

La surtension, quand elle existe, est obtenue pour  $x = x_1$ . Elle se rapproche de l'axe des ordonnées lorsque  $Q$  augmente et vaut d'environ  $20 \log Q$  lorsque  $Q$  est élevé (car  $x_1 \rightarrow 1$  quand  $Q \gg 1$ ) (voir le détail Figure 14).

Conclusion: le filtre passe-bas du second ordre présente une meilleure coupure à hautes fréquences que le passe-bas du premier ordre (pente à  $-40$  dB/décade au lieu de  $-20$  dB/décade). Par contre, l'existence d'une surtension à la coupure pour  $Q \geq \sqrt{2}/2$  peut être considérée comme un défaut en terme de filtrage.

**4.2 Circuit RLC passe-bande : sortie aux bornes de R**

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes de la résistance. Condensateur et bobines sont supposés idéaux.

**a) Fonction de transfert**

- On a (diviseur de tension):

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{R}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)}$$

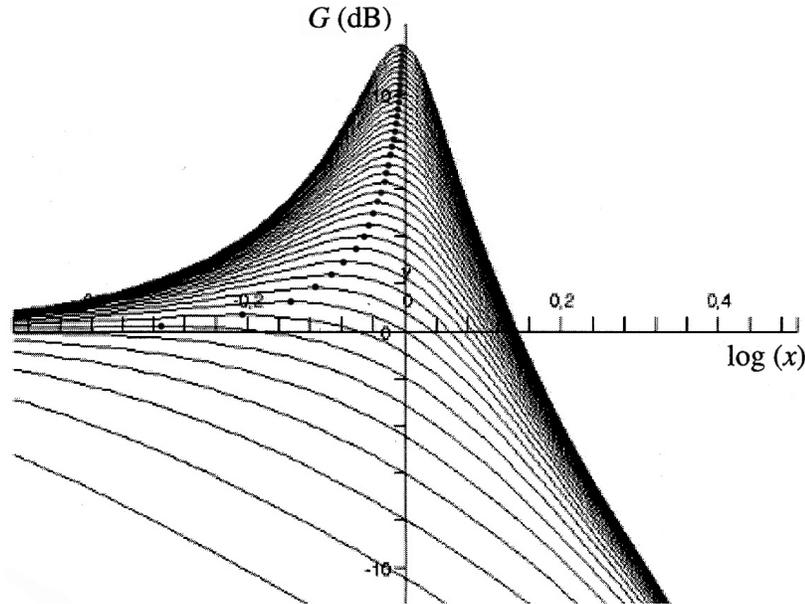


Figure 14: Filtre passe-bas: évolution du maximum de la réponse en gain (pour  $Q \geq \sqrt{2}/2$ ) [avec Maple]

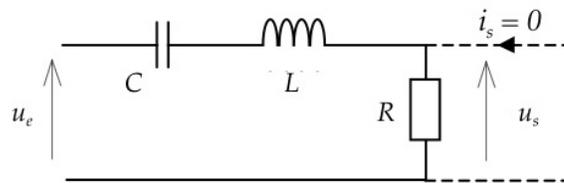


Figure 15:  $RLC$  passe-bande d'ordre 2

Soit:

$$H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

- Forme canonique

Au dénominateur:

- 1) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $(j\frac{\omega}{\omega_0})^2$ . Ceci permet de déterminer  $\omega_0$ .
- 2) on identifie le terme en  $\omega$  à  $\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}$ . Ceci permet de déterminer le facteur de qualité  $Q$ .

Au numérateur:

- 3) on identifie le terme en  $\omega$  à  $H_0\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}$ . Ceci permet de déterminer le coefficient réel  $H_0$ .

$$\text{Soit } -LC\omega^2 = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{et } jRC\omega = \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{enfin } jRC\omega = H_0\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow H_0 = RCQ\omega_0 = 1$$

Finalement:

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Forme réduite: en posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient:

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{Q}jx}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2}$$

- Seconde forme réduite (pratique pour les calculs): on divise numérateur et dénominateur par  $\frac{1}{Q}jx$ . D'où:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

**b) Module et argument**

- Module

$$H = \frac{x/Q}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = -10 \log \left( 1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{1}{Q}jx\right) - \arg\left(1 + \frac{1}{Q}jx - x^2\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

avec  $\underline{H} = \frac{\frac{1}{Q}jx}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2} = \frac{\frac{x^2}{Q^2} + \frac{1}{Q}jx(1-x^2)}{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}$  donc  $\cos \phi > 0 \rightarrow \phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

Remarque: l'argument peut s'obtenir en translatant de  $+\pi/2$  celui du filtre passe-bas.

**c) Comportements limites**

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil (interrupteur fermé)  $\rightarrow u_s = 0$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert  $\rightarrow u_s = 0$

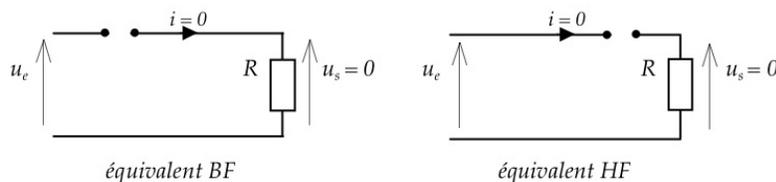


Figure 16: Circuits limites du filtre *RLC* passe-bande

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre passe-bande.

**d) Etude asymptotique**

• Equations des asymptotes

★ BF si  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx \frac{1}{Q}jx$  donc  $G_{dB} = 20 \log x - 20 \log Q$  et  $\phi \rightarrow +\frac{\pi}{2}$   
 → l'asymptote est une droite de pente +20 dB/décade.

★ HF si  $x \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx \frac{1}{Q}j\frac{x}{-x^2} = -\frac{j}{Qx}$  donc  $G_{dB} = -20 \log x - 20 \log Q$  et  $\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$   
 → l'asymptote est une droite de pente -20 dB/décade.

★ Intersection des asymptotes:  $20 \log x - 20 \log Q = -20 \log x - 20 \log Q \rightarrow 40 \log x = 0 \rightarrow x = 1$ .

On a alors comme valeur de l'intersection:  $y_1 = -20 \log Q$ .

• Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = 1$  donc  $G_{dB} = 0$  dB et  $\phi = 0$ .

• Conclusion:

- le maximum du gain est obtenu en  $x = 1$  et vaut 0 dB, quelle que soit la valeur du facteur de qualité  $Q$ ;
- pour  $Q > 1$ , l'intersection des asymptotes est négative ( $y_1 < 0$ ): la courbe est **au-dessus** des asymptotes, la résonance est "pointue";
- pour  $Q < 1$ , l'intersection des asymptotes est positive ( $y_1 > 0$ ): la courbe est **au-dessous** des asymptotes, la résonance est "aplatie";
- le cas  $Q = 1$  est le cas limite: l'intersection des asymptotes et le gain valent tous les deux 0 en  $x = 1$ .

**e) Diagrammes de Bode**

On en déduit les diagrammes de Bode de gain et de phase du *RLC* passe-bande.

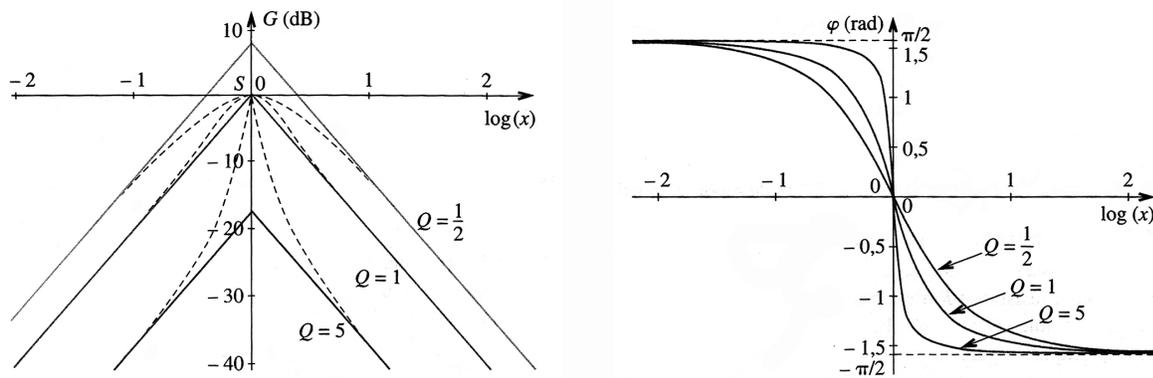


Figure 17: Diagrammes de Bode (gain et phase) du *RLC* passe-bande

**f) Bande passante à 3 dB**

Pour évaluer la sélectivité du filtre passe-bande, on calcule sa bande passante, soit l'intervalle  $[\omega_1, \omega_2]$  tel que

$$H(\omega_i) = H(x_i) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

$$\text{soit } Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \rightarrow Q \left(x - \frac{1}{x}\right) = \pm 1 \rightarrow Qx^2 \pm x - Q = 0$$

D'où deux équations avec deux racines chacune:

$$\begin{cases} Qx^2 + x - Q = 0 & (1) \\ Qx^2 - x - Q = 0 & (2) \end{cases}$$

Racines de l'équation (1):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} = -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Racines de l'équation (2):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q} = +\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

Or  $x > 0$ , les seules racines convenables sont donc:  $x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$  et  $x_2 = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$

avec  $\omega_1 = x_1 \omega_0$  et  $\omega_2 = x_2 \omega_0$ .

La bande passante  $\omega_2 - \omega_1$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ) est donc finalement:

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega = \omega_0(x_2 - x_1) = \omega_0 \left( \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} \right) = \frac{\omega_0}{Q}$$

D'où:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

→ la bande passante est d'autant plus étroite que le facteur de qualité  $Q$  est élevé (d'où son nom).

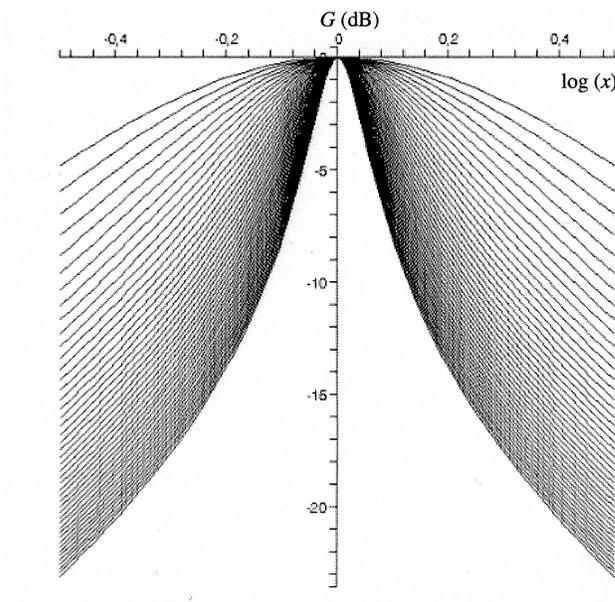


Figure 18: Filtre passe-bande: allure au voisinage de la résonance [avec Maple]

### 4.3 Circuit RLC passe-haut : sortie aux bornes de L

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes de la bobine supposée idéale. Le condensateur est également supposé idéal.

#### a) Fonction de transfert

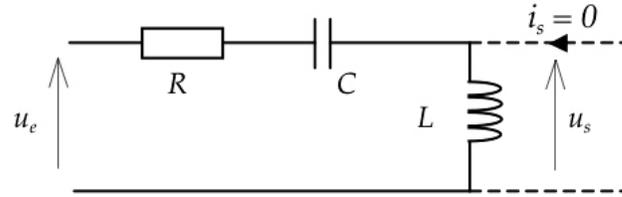


Figure 19: RLC passe-haut d'ordre 2

On a (formule du diviseur de tension):

$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)}$$

Soit:

$$\underline{H} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

• Forme canonique

Au dénominateur:

- 1) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $(j\frac{\omega}{\omega_0})^2$ . Ceci permet de déterminer  $\omega_0$ .
- 2) on identifie le terme en  $\omega$  à  $\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}$ . Ceci permet de déterminer le facteur de qualité  $Q$ .

Au numérateur:

- 3) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $H_0(j\frac{\omega}{\omega_0})^2$ . Ceci permet de déterminer le coefficient réel  $H_0$ .

Soit  $-LC\omega^2 = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

et  $jRC\omega = \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

enfin  $-LC\omega^2 = H_0\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow H_0 = LC\omega_0^2 = 1$

Finalement:

$$\underline{H} = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

• Forme réduite: en posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient:

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2}$$

**b) Module et argument**

• Module

$$H = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = 40 \log(x) - 10 \log((1-x^2)^2 + x^2/Q^2)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = \arg(-x^2) - \arg\left(1 + \frac{1}{Q}jx - x^2\right) = \pi - \arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$$

$$\text{avec } \underline{H} = \frac{-x^2}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2} = \frac{-x^2(1-x^2) + \frac{1}{Q}jx^3}{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2} \quad \text{donc } \sin \phi > 0 \rightarrow \phi \in [0, \pi]$$

Remarque: l'argument peut s'obtenir en translatant de  $+\pi$  celui du filtre passe-bas.

### c) Comportements limites

- Circuits équivalents

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil (interrupteur fermé)  $\rightarrow \underline{u}_s = 0$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert  $\rightarrow \underline{u}_s = \underline{u}_e$

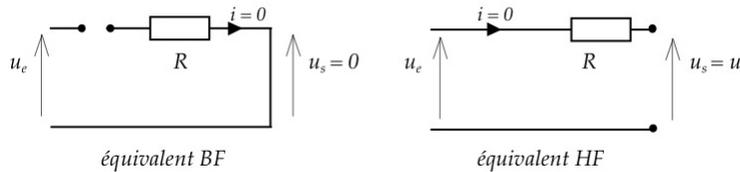


Figure 20: Circuits limites du filtre *RLC* passe-haut

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre passe-haut.

### d) Etude asymptotique

- Equations des asymptotes

★ BF si  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx x^2$  donc  $G_{dB} = 20 \log(x^2) = +40 \log x$  et  $\phi \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  l'asymptote est une droite de pente  $+40$  dB/décade.

★ HF si  $x \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  asymptote horizontale

★ Intersection des asymptotes:  $40 \log x = 0 \rightarrow x = 1$  (soit  $\omega = \omega_0$ ).

- Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = -1/(1 + j/Q - 1) = jQ$  donc  $G_{dB} = 20 \log Q$   
 et  $\phi = \arg(-1/(1 + j/Q - 1)) = \arg(+jQ) = +\pi/2$ .

- Courbe réelle

Comme pour le passe-bas du second ordre, la quantité  $20 \log Q$  peut prendre des valeurs très différentes suivant les valeurs de  $Q$ : il peut exister une surtension à la coupure pour certaines valeurs de  $Q$ .

Etudions le maximum du gain: il faut ici calculer la dérivée de  $H(x)$  par rapport à  $x$  et résoudre  $dH/dx = 0$ . On trouve:

$$\frac{1}{x} = 0 \text{ soit } x \rightarrow \infty \text{ ou } x = x_2 = 1/\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comme pour le basse-bas,  $G_{dB}$  passe donc par un pic au voisinage de  $x = 1$  pour  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$

Conclusion:

$$\begin{cases} \text{si } Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}} : & \text{le maximum de } G_{dB} \text{ est en } x \rightarrow +\infty \text{ (asymptote HF)} \\ \text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}} : & \text{le maximum de } G_{dB} \text{ est en } x = x_2 = 1/\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ (proche de } x=1) \end{cases}$$

**e) Diagrammes de Bode**

On en déduit les diagrammes de Bode de gain et de phase du *RLC* passe-haut.

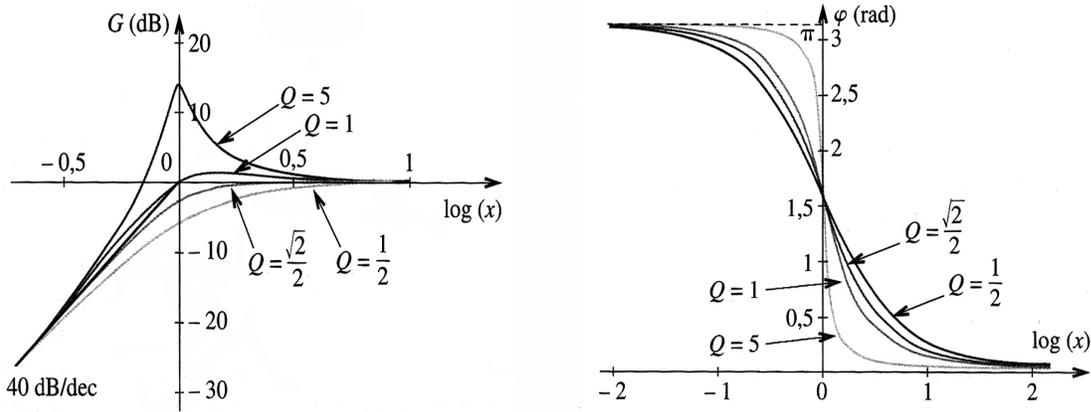


Figure 21: Diagrammes de Bode (gain et phase) du *RLC* passe-haut

Conclusion: le filtre du second ordre présente une meilleure coupure à basses fréquences (pente à +40 dB/décade au lieu de +20 dB/décade). Par contre, l'existence d'une surtension à la coupure pour  $Q \geq \sqrt{2}/2 (= 0,707)$  peut être considérée comme un défaut en terme de filtrage.

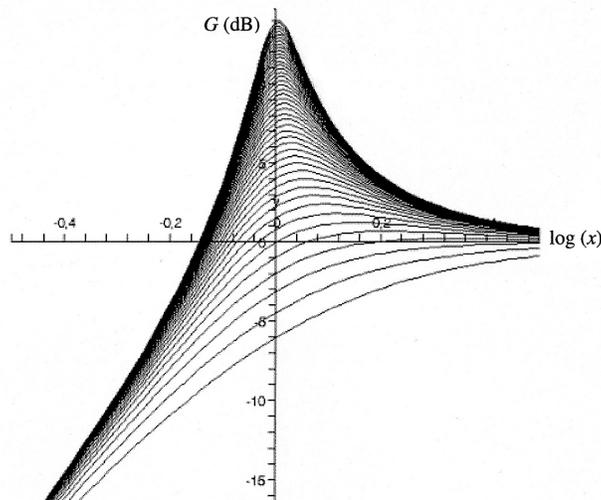


Figure 22: Filtre passe-haut: évolution du maximum de la réponse en gain (pour  $Q \geq \sqrt{2}/2$ ) [avec Maple]

**4.4 Circuit RLC coupe-bande : sortie aux bornes de L et C en série**

La tension de sortie  $u_s$  est prise aux bornes de L et C en série, supposés idéaux.

**a) Fonction de transfert**

On a (formule du diviseur de tension):

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jL\omega + 1/(jC\omega)}{R + jL\omega + 1/(jC\omega)}$$

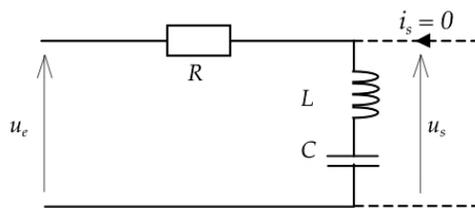


Figure 23:  $RLC$  coupe-bande d'ordre 2

Soit:

$$\underline{H} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

- Forme canonique

Au dénominateur:

- 1) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $(j\frac{\omega}{\omega_0})^2$ . Ceci permet de déterminer  $\omega_0$ .
- 2) on identifie le terme en  $\omega$  à  $\frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0}$ . Ceci permet de déterminer le facteur de qualité  $Q$ .

Au numérateur:

- 3) on identifie le terme en  $\omega^2$  à  $H_0(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)$ . Ceci permet de déterminer le coefficient réel  $H_0$ .

Soit  $-LC\omega^2 = \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

et  $jRC\omega = \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

enfin  $1 - LC\omega^2 = H_0\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \rightarrow H_0 = 1$

Finalement:

$$\underline{H} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{1}{Q}j\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Forme réduite: en posant  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , on obtient:

$$\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 + \frac{1}{Q}jx - x^2}$$

**b) Module et argument**

- Module

$$H = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}}$$

Le gain en décibels est alors

$$G_{dB} = 20 \log H = 20 \log |1 - x^2| - 10 \log((1 - x^2)^2 + x^2/Q^2)$$

- Argument

$$\phi = \arg(\underline{H}) = \arg(1 - x^2) - \arg\left(1 + \frac{1}{Q}jx - x^2\right)$$

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 1 : & \arg(1 - x^2) = 0 \rightarrow \phi = \text{phase du basse-bas d'ordre 2} \\ \text{si } x > 1 & \arg(1 - x^2) = \pi \rightarrow \phi = \pi + \text{phase du basse-bas d'ordre 2} \end{cases}$$

**c) Comportements limites**

A basse fréquence (BF), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil (interrupteur fermé)  $\rightarrow \underline{u}_s = 0$

A haute fréquence (HF), le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert  $\rightarrow \underline{u}_s = \underline{u}_e$

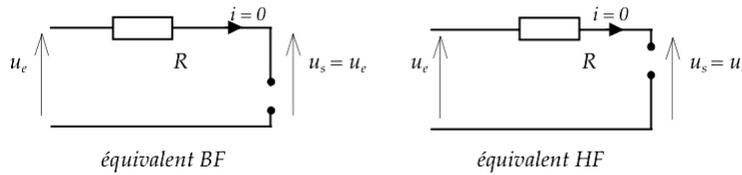


Figure 24: Circuits limites du filtre RLC coupe-bande

Conclusion: le filtre se comporte comme un filtre coupe-bande (ou réjecteur).

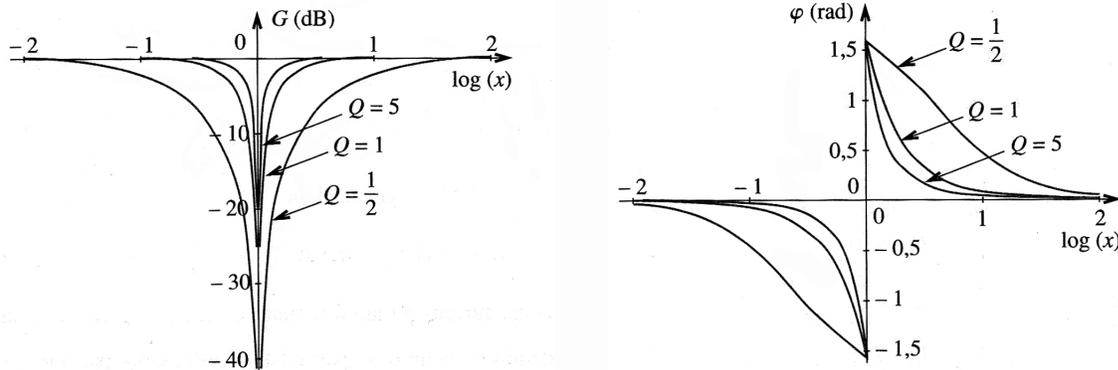


Figure 25: Diagrammes de Bode (gain et phase) du RLC coupe-bande

**d) Etude asymptotique**

- Equations des asymptotes

★ BF si  $x \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  asymptote horizontale

★ HF si  $x \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_0$ ),  $\underline{H} \approx 1$  donc  $G_{dB} \approx 0$  dB et  $\phi \rightarrow 0$   
 $\rightarrow$  asymptote horizontale

- Pour  $x = 1$  ( $\omega = \omega_0$ ):  $\underline{H} = 0$  donc  $G_{dB} \rightarrow -\infty$   
 $\rightarrow$  asymptote verticale

et  $\phi = \arg[-jQ(1 - x^2)] = \arg[-jQ(1 - x)(1 + x)] \approx \arg(2jQ\epsilon)$  en posant  $x = 1 + \epsilon$ . D'où:

$$\begin{cases} \text{si } \epsilon < 0 \text{ (} x \rightarrow 1^- \text{)} : & \phi \rightarrow -\pi/2 \\ \text{si } \epsilon > 0 \text{ (} x \rightarrow 1^+ \text{)} : & \phi \rightarrow +\pi/2 \end{cases}$$

### e) Diagrammes de Bode

On en déduit les diagrammes de Bode de gain et de phase du *RLC* coupe-bande (Figure 25).

## 5 Récapitulatif et Généralisation

### 5.1 Notations

On pose:  $\omega_0$  pulsation caractéristique du filtre  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  pulsation réduite

$Q$  facteur de qualité du filtre  $\sigma = \frac{1}{2Q}$  coefficient d'amortissement du filtre

$H_0$  nombre réel quelconque

### 5.2 Principaux types de filtres

- Passe-bas d'ordre 1:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

Exemple: circuit *RC*, sortie aux bornes de *C*; circuit *RL*, sortie aux bornes de *R*.

- Passe-haut d'ordre 1:

$$\underline{H} = \frac{H_0 jx}{1 + jx}$$

Exemple: circuit *RC*, sortie aux bornes de *R*.

- Déphaseur d'ordre 1:

$$\underline{H} = \frac{1 - jx}{1 + jx}$$

Exemple: circuit déphaseur *RC* à amplificateur opérationnel.

- Passe-bas d'ordre 2:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2}$$

Exemple: circuit *RLC* série, sortie aux bornes de *C*.

- Passe-bande d'ordre 2:

$$\underline{H} = \frac{H_0 \frac{1}{Q} jx}{1 + \frac{1}{Q} jx + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

$$\underline{H} = \frac{H_0 2\sigma jx}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{2\sigma} j(x - \frac{1}{x})}$$

Exemple: circuit *RLC* série, sortie aux bornes de *R*.

- Passe-haut d'ordre 2:

$$\underline{H} = \frac{H_0(jx)^2}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2} = \frac{H_0(jx)^2}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2}$$

Exemple: circuit *RLC* série, sortie aux bornes de *L*.

- Coupe-bande d'ordre 2:

$$\underline{H} = \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2} = \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2}$$

Exemple: circuit *RLC* série, sortie aux bornes de *L* et *C* en série.

- Déphaseur d'ordre 2:

$$\underline{H} = \frac{1 - \frac{1}{Q}jx + (jx)^2}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2} = \frac{1 - 2\sigma jx + (jx)^2}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2}$$

Exemple: Circuits déphaseurs *RC* à amplificateur opérationnel en cascade.

### 5.3 Cas d'un régime variable quelconque

Les fonctions de transfert données ci-dessus ne sont valables qu'en régime sinusoïdal forcé. Pour un régime variable quelconque, on les établit en régime sinusoïdal forcé (réponse fréquentielle) puis on revient à l'équation différentielle (réponse temporelle) en utilisant la correspondance:

$$\begin{array}{ccc} j\omega & \longleftrightarrow & \frac{d}{dt} \\ \text{réponse fréquentielle} & \longleftrightarrow & \text{réponse temporelle} \end{array}$$

### 5.4 Stabilité

- Un filtre est stable si sa réponse à toute excitation est bornée, quelle que soient les conditions initiales.
- Un filtre de fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0}$$

est stable si:

- $m \leq n$ ;
- les racines du dénominateur sont à partie réelle négative. Pour les filtres d'ordre 1 et 2, il faut que tous les coefficients  $a_i$  soient de même signe.

### 5.5 Filtres en cascade

- En général, la fonction de transfert  $\underline{H}$  de l'association de deux filtres (1) et (2) n'est pas égale au produit  $\underline{H}_1 \times \underline{H}_2$  des fonctions de transfert *en sortie ouverte*. En effet, si le second filtre charge le premier, la fonction de transfert de ce dernier se trouve modifiée.

Pour que ce soit le cas, il faut que l'impédance d'entrée du second filtre soit très élevée. On peut par exemple réaliser simplement cette condition en intercalant un amplificateur opérationnel en mode suiveur entre les deux filtres.

Exemple:

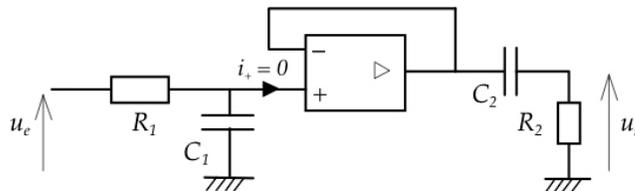


Figure 26: Filtres passe-bas et passe-haut en cascade avec A.O. suiveur

Le courant d'entrée de l'A. O. étant nul, le filtre 1 ( $R_1C_1$  passe-bas) peut donc être considéré comme étant en sortie ouverte. D'où:

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \times \frac{jR_2C_2\omega}{1 + jR_2C_2\omega} = \frac{jR_2C_2\omega}{1 + j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega - R_1R_2C_1C_2\omega^2} \quad (\text{passe-bande})$$

- Cas d'un filtre du second ordre de fonction de transfert du type

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{1}{Q}jx + (jx)^2} = \frac{H_0}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2}$$

Propriété:  $\underline{H}$  peut se décomposer en produit de fonctions de transfert du premier ordre si  $Q < \frac{1}{2}$  ou  $\sigma > 1$ .

En effet, en posant  $X = jx$ , les racines du polynôme  $1 + 2\sigma X + X^2$  s'écrivent

$$X_1 = -\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 1} \quad \text{et} \quad X_2 = -\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 1}$$

Quand  $\sigma > 1$ , elles sont réelles et négatives, et  $\underline{H}$  s'écrit alors:

$$\underline{H} = H_0 \frac{1}{(X_1 - X)} \times \frac{1}{(X_2 - X)} = H_0 \frac{X_1}{1 + jx/(-X_1)} \times \frac{X_2}{1 + jx/(-X_2)}$$

## 6 Compléments

### 6.1 Séries de Fourier

#### a) Définition

- Soit  $x(t)$  un signal périodique quelconque de période  $T$  et de pulsation  $\omega$  ( $T = 2\pi/\omega$ ). Un tel signal peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinus et cosinus appelée série de Fourier, soit:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

où les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont donnés par:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega t \, dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t \, dt$$

- Le terme  $a_0/2$  représente la valeur moyenne du signal  $x(t)$ :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, dt$$

- Les termes  $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ , de pulsation  $n\omega$ , sont appelés *harmoniques* d'ordre  $n$  du signal  $x(t)$ .

L'harmonique d'ordre 1, de même pulsation  $\omega$  que  $x(t)$ , est appelé *fondamental*.

### b) Spectre de fréquence

- On peut aussi écrire la décomposition du signal  $x(t)$  sous la forme:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

où  $c_n$  est l'amplitude de l'harmonique de rang  $n$ .

- L'ensemble des  $c_n$  forme le spectre de fréquence du signal  $x(t)$ . On le visualise sur un diagramme dans lequel les amplitudes  $c_n$  sont représentées en fonction de la pulsation  $n\omega$  (ou de la fréquence  $nf$ ).

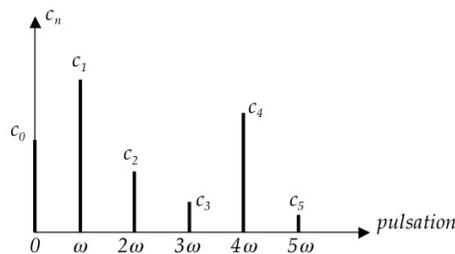


Figure 27: Spectre d'un signal  $x(t)$

Remarque: on peut aussi former les spectres des coefficients  $a_n$  et des coefficients  $b_n$  du signal.

### c) Propriétés

- $c_n \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ .
- La série de Fourier d'une fonction  $x(t)$  paire est une somme de cosinus. En effet, si  $x(t)$  est paire, son développement en série de Fourier l'est également donc  $b_n = 0 \forall n$ .
- La série de Fourier d'une fonction  $x(t)$  impaire est une somme de sinus. En effet, si  $x(t)$  est impaire, son développement en série de Fourier l'est également donc  $a_n = 0 \forall n$ .

### d) Exemples de décompositions en série de Fourier

- Cas d'un signal rectangulaire symétrique d'amplitude  $x_m$ :

$$x(t) = \frac{4x_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right)$$

La décomposition de Fourier ne comprend que des termes en sinus du type  $\sin(2n+1)\omega t / (2n+1)$ .

- Cas d'un signal rectangulaire symétrique d'amplitude  $x_m$ :

$$x(t) = -\frac{8x_m}{\pi^2} \left( \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega t}{5^2} + \dots \right)$$

La décomposition de Fourier ne comprend que des termes en cosinus du type  $\cos(2n+1)\omega t / (2n+1)^2$ .

### e) Utilisation des fonctions de transfert

- Pour un filtre donné, la réponse d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales est la combinaison linéaire des réponses.
- Pour un signal périodique quelconque  $x(t)$ , il suffit donc de déterminer la réponse sinusoïdale correspondant à chacun des termes de sa décomposition en série de Fourier. On utilise pour cela la représentation complexe. La réponse du filtre est la combinaison linéaire des réponses.
- Intérêt: l'étude des fonctions de transfert en régime sinusoïdal telle qu'elle a été menée dans les paragraphes précédents permet donc de déterminer la réponse à n'importe quel signal périodique.

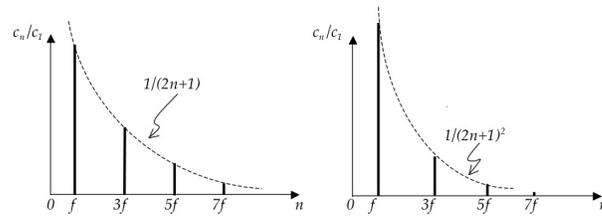


Figure 28: Spectre des signaux rectangulaire (à gauche) et triangulaire (à droite)

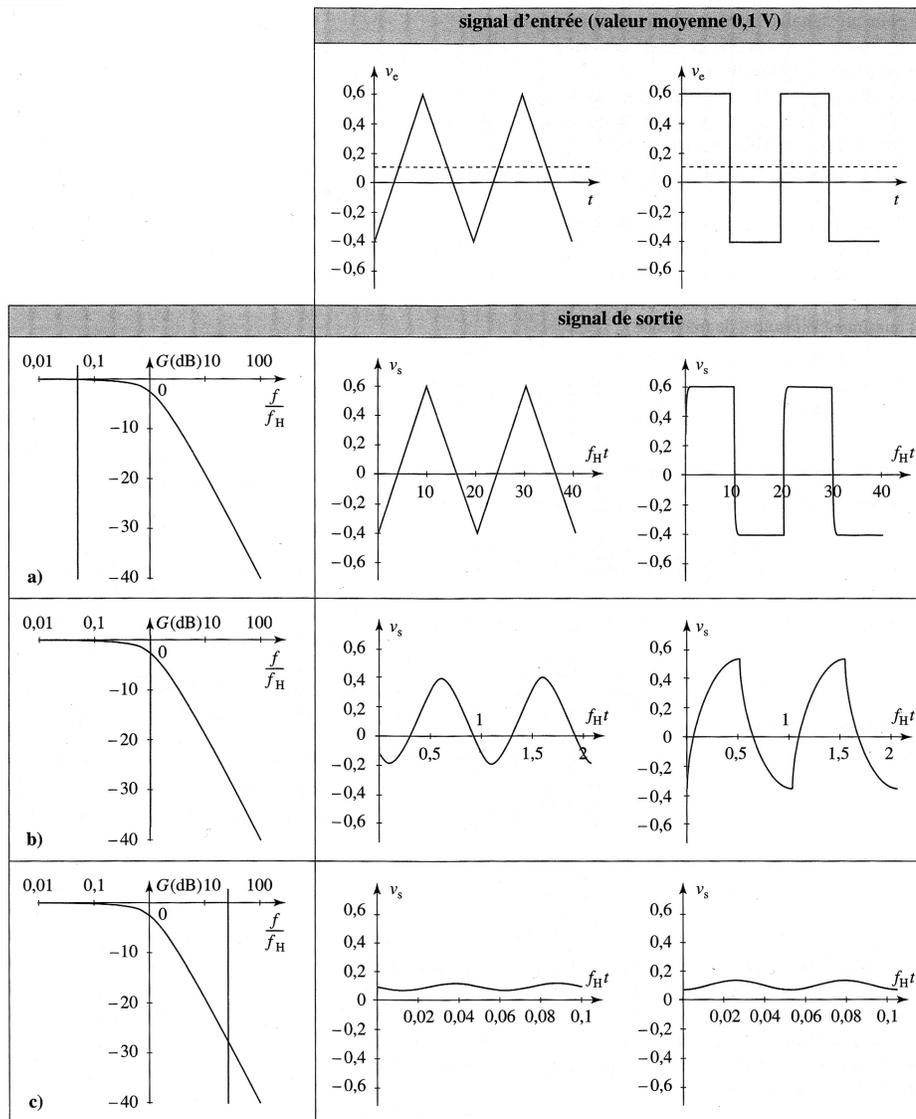


Figure 29: Déformation d'un signal périodique rectangulaire ou triangulaire non symétrique par un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_H$ . Le filtre élimine les harmoniques haute-fréquence du signal, qui se trouve de ce fait déformé en sortie. La déformation est d'autant plus importante que la fréquence du signal d'entrée est élevée. a)  $f = f_H/20$ : les seules déformations ont lieu au niveau des discontinuités du créneau; b)  $f = f_H$ : forte déformation; c)  $f = 20f_H$ : il ne reste pratiquement plus que la composante continue en sortie (tiré de *Electronique 2e année PSI-PSI\**, Hachette 2004).

## 6.2 Un exemple de filtre du 3<sup>e</sup> ordre

Considérons le filtre formé de trois cellules  $RC$ , où les condensateurs sont considérés idéaux.

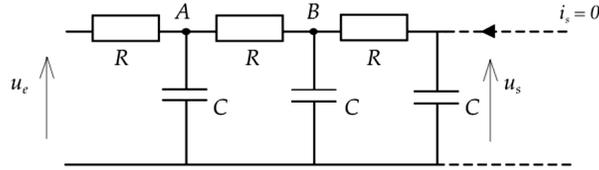


Figure 30: Filtre à triple cellule  $RC$  en cascade

Pour calculer la fonction de transfert  $\underline{H}$ , appliquons Millman en A et B:

$$V_A = \frac{\underline{u}_e/R + V_B/R}{1/R + 1/R + jC\omega} \quad \text{et} \quad V_B = \frac{V_A/R + \underline{u}_s/R}{1/R + 1/R + jC\omega}$$

En éliminant  $V_A$ , on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{u}_e + V_B}{2 + jRC\omega} &= (2 + jRC\omega)V_B - \underline{u}_s \\ \rightarrow \underline{u}_e + V_B &= (2 + jRC\omega)(2 + jRC\omega)V_B - (2 + jRC\omega)\underline{u}_s \end{aligned} \quad (2)$$

Par ailleurs, on a entre  $V_B$  et  $\underline{u}_s$  (diviseur de tension):

$$\underline{u}_s = \frac{V_B}{1 + jRC\omega} \quad \rightarrow \quad V_B = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s \quad (3)$$

En éliminant  $V_B$  entre (2) et (3), on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \underline{u}_e + (1 + jRC\omega)\underline{u}_s &= (2 + jRC\omega)(2 + jRC\omega)(1 + jRC\omega)\underline{u}_s - (2 + jRC\omega)\omega\underline{u}_s \\ \rightarrow \underline{u}_e &= ((2 + jRC\omega)(2 + jRC\omega)(1 + jRC\omega) - (2 + jRC\omega) - (1 + jRC\omega))\underline{u}_s \\ \rightarrow \underline{u}_e &= (1 + 6jRC\omega - 5(RC\omega)^2 - j(RC\omega)^3)\underline{u}_s = (1 + 6jRC\omega + 5(jRC\omega)^2 + (jRC\omega)^3)\underline{u}_s \end{aligned}$$

D'où:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 6jRC\omega + 5(jRC\omega)^2 + (jRC\omega)^3}$$

En posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on peut écrire:  $\underline{H} = \frac{1}{1 + 6jx + 5(jx)^2 + (jx)^3}$

Il s'agit d'un filtre du 3<sup>e</sup> ordre. Déterminons l'équation différentielle entre  $u_s(t)$  et  $u_e(t)$ :

$$\rightarrow \underline{u}_e = (1 + 6jRC\omega + 5(jRC\omega)^2 + (jRC\omega)^3)\underline{u}_s = \underline{u}_s + 6RC \frac{d\underline{u}_s}{dt} + 5R^2C^2 \frac{d^2\underline{u}_s}{dt^2} + R^3C^3 \frac{d^3\underline{u}_s}{dt^3}$$

d'où: 
$$R^3C^3 \frac{d^3u_s(t)}{dt^3} + 5R^2C^2 \frac{d^2u_s(t)}{dt^2} + 6RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$